

Моделирование инфокоммуникационных сетей и систем. Обработка результатов измерений

Дунайцев Р.А.

Кафедра сетей связи и передачи данных СПбГУТ
им. проф. М.А. Бонч-Бруевича

roman.dunaytsev@spbgut.ru

Лекция № 2

- 1 Введение
- 2 Измерения
- 3 Погрешности
- 4 Систематическая погрешность
- 5 Случайная погрешность
- 6 Обработка результатов измерений
- 7 Погрешность косвенного измерения
- 8 Литература

- 1 Введение
- 2 Измерения
- 3 Погрешности
- 4 Систематическая погрешность
- 5 Случайная погрешность
- 6 Обработка результатов измерений
- 7 Погрешность косвенного измерения
- 8 Литература

- Непосредственная задача большинства экспериментов – измерение величин и получение их числовых значений
- Однако результаты всех измерений, как бы тщательно они не выполнялись, всегда получаются с некоторыми погрешностями
 - Поэтому истинное значение измеряемой величины остается для нас неизвестным
 - Истинное значение может вообще не существовать ☺
- Кроме того, результаты эксперимента или наблюдения зачастую представляют собой набор статистических данных, которые необходимо уметь правильно обрабатывать и интерпретировать
- Анализом ошибок (погрешностей) измерений занимаются **теория вероятностей** и **математическая статистика**

- Умение работать с погрешностями является важной частью любого научного эксперимента на всех(!) его этапах
- **Этап подготовки и проведения экспериментов:**
 - Необходимо знать точность используемых приборов
 - Уметь находить пути возможного уменьшения ошибок
 - Разумно организовать сами измерения
 - Правильно оценивать точность полученных значений
- **Этап обработки результатов:**
 - Необходимо рассчитать погрешность в конечных результатах по известным оценкам погрешностей в исходных данных
- **Этап интерпретации результатов:**
 - Без знания точности и без корректной статистической обработки невозможно делать обоснованные выводы

- 1 Введение
- 2 Измерения**
- 3 Погрешности
- 4 Систематическая погрешность
- 5 Случайная погрешность
- 6 Обработка результатов измерений
- 7 Погрешность косвенного измерения
- 8 Литература

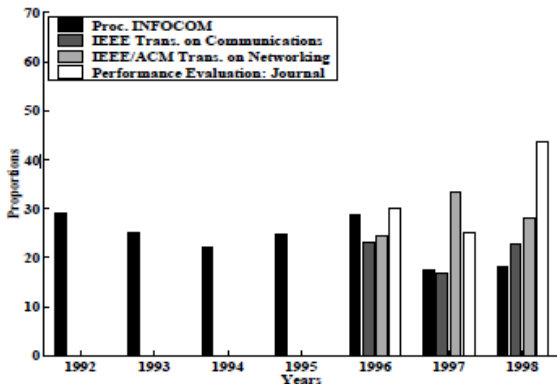
- **Измерение** – нахождение значения физической величины опытным путем с помощью технических средств
- **2 основных типа измерений**
 - Прямые
 - Косвенные
- **Прямое измерение** – искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных
 - Т.е. с помощью приборов, которые измеряют непосредственно саму исследуемую величину (длина, ...)
 - Часто зависимость искомой величины от измеряемой заложена в конструкции и принципе действия измерительного прибора (температура, ...)

- **Косвенное измерение** – искомое значение величины находят вычислением на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, определяемыми в результате прямых измерений
 - Плотность, сопротивление, ...
- Качество измерений определяется их точностью
- **Точность прямых измерений:**
 - Точность прибора
 - Точность метода
 - Число измерений
- **Точность косвенных измерений:**
 - Точность прямых измерений
 - Структура расчетной формулы

- 1 Введение
- 2 Измерения
- 3 Погрешности**
- 4 Систематическая погрешность
- 5 Случайная погрешность
- 6 Обработка результатов измерений
- 7 Погрешность косвенного измерения
- 8 Литература

- **Погрешность (ошибка) измерения** – отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины
- Задачей любого измерения является не только установление наиболее точного значения измеряемой величины, но и оценка границ возможных погрешностей
- **Без указания оценки погрешности результат измерения имеет малую ценность!**

- *K. Pawlikowski, H.-D. Joshua Jeong, J.-S. Ruth Lee, 'On Credibility of Simulation Studies of Telecommunication Networks,' 2001*
- Доля статей с корректной статистической обработкой данных от общего числа статей с имитационным моделированием:



- **3 вида погрешностей измерения**
 - Промахи (грубые ошибки)
 - Систематические
 - Случайные

- **Промахи** – возникают в результате недосмотра экспериментатора и/или неисправности аппаратуры
 - Грубых ошибок следует избегать
 - Если установлено, что они произошли, соответствующие измерения нужно отбросить

- **Систематические погрешности** – связаны с несовершенством методики измерений, с ограниченностью точности измерительных приборов, с особенностями объекта исследования
 - Сохраняют свою величину и знак или закономерно изменяются во время эксперимента
 - Могут быть исключены путем внесения соответствующей поправки
- **Случайные погрешности** – связаны с неконтролируемыми изменениями условий равноточных (однородных) опытов, приводящими к разбросу численных значений измеряемой величины
 - Меняют величину и знак от опыта к опыту
 - Могут быть обнаружены при многократном повторении опытов (разброс результатов)
 - Полностью исключить невозможно

- 1 Введение
- 2 Измерения
- 3 Погрешности
- 4 Систематическая погрешность**
- 5 Случайная погрешность
- 6 Обработка результатов измерений
- 7 Погрешность косвенного измерения
- 8 Литература

- **Количественный характер:**

- Постоянная по величине и знаку
- Изменяется по какому-либо закону в процессе измерений

- **Причины появления:**

- Несовершенство измерительного прибора
(какие-то неточности)
- Некорректная методика проведения эксперимента
(что-то не учитывается)
- Использование при расчетах приближенных формул
(ошибки или округление)

• Типы погрешностей:

- Погрешности, природа которых известна и которые могут быть достаточно точно определены (наличие малого, но ненулевого воздействия прибора)
 - Погрешности известного происхождения, но неизвестной величины (сдвиг нуля шкалы прибора)
 - Погрешности, о существовании которых мы не подозреваем, но которые могут существенно исказить результаты измерений (особенно в малоизученных областях науки)
-
- Оценку систематических погрешностей экспериментатор проводит, анализируя особенности методики, паспортную точность прибора и проводя контрольные опыты
 - Если систематическая погрешность опыта слишком велика, то обычно оказывается проще использовать новые, более точные приборы, чем исследовать погрешность старых 😊

- Систематические ошибки, связанные с ограниченной точностью приборов, подлежат учету
- **Характеристики приборов**
 - Предел измерения
 - Цена деления
 - Класс точности
- **Предел измерения** – максимальное значение измеряемой данным прибором величины
 - У одного прибора может быть несколько пределов измерения

- **Цена деления** – величина, равная пределу измерения прибора, деленному на число делений шкалы (для равномерной шкалы)
- **Класс точности** – число, равное максимальной относительной погрешности в %%, которую вносит прибор при измерении на пределе используемой шкалы
 - В случае отсутствия класса точности, в качестве максимальной абсолютной погрешности берут 1 или $1/2$ деления шкалы прибора

Систематическая погрешность

- Предел измерения миллиамперметра = 100 мА
- Число делений шкалы = 20
- Цена деления = $100/20 = 5$ мА
- Класс точности = 1.5
- Приборная погрешность = $\frac{100 \times 1.5}{100} = 1.5$ мА



● Пример 1:

- Отклонение стрелки = 4 деления
- Показание прибора = 20 мА
- Результат измерения = (20 ± 1.5) мА
- Относительная погрешность измерения = $\frac{1.5 \times 100}{20} = 7.5\%$

● Пример 2:

- Отклонение стрелки = 20 делений
- Показание прибора = 100 мА
- Результат измерения = (100 ± 1.5) мА
- Относительная погрешность измерения = $\frac{1.5 \times 100}{100} = 1.5\%$

- Наименьшую относительную погрешность прибор вносит при измерении на пределе используемой шкалы

- 1 Введение
- 2 Измерения
- 3 Погрешности
- 4 Систематическая погрешность
- 5 Случайная погрешность**
- 6 Обработка результатов измерений
- 7 Погрешность косвенного измерения
- 8 Литература

- **Количественный характер:**
 - Переменная по величине и знаку
- **Причины появления:**
 - Прибор и метод (вибрация, люфт, промежуточное положение стрелки, параллакс)
 - Исследуемый объект (несовершенство объекта, случайный характер измеряемой величины)
- Если измеряемая величина может принимать непрерывные значения, то ее невозможно(!) измерить абсолютно точно
 - Т.е. результаты измерений носят случайный характер
 - При определенных условиях статистические методы обработки данных могут помочь уменьшить результирующую ошибку

- 1 Введение
- 2 Измерения
- 3 Погрешности
- 4 Систематическая погрешность
- 5 Случайная погрешность
- 6 Обработка результатов измерений**
- 7 Погрешность косвенного измерения
- 8 Литература

- Предположим, что промахи и систематические ошибки устранены и можно рассматривать только случайные ошибки
- Чтобы учесть случайные ошибки (погрешности) определяют их среднее абсолютное и среднее относительное значение
- Измерив величину X несколько раз, мы получаем ряд значений
 - При обработке результатов измерений следует учитывать все(!) полученные числа, независимо от их повторяемости

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

- Среднее значение измеряемой величины :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- **Абсолютные погрешности отдельных измерений** :

$$\Delta x_1 = x_1 - \bar{x}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - \bar{x}$$

...

$$\Delta x_n = x_n - \bar{x}$$

- **Средняя абсолютная погрешность** :

$$\Delta x = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|}{n}$$

- **Относительная погрешность** :

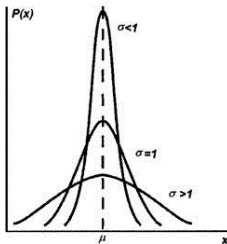
$$\delta = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

- Для большого числа n равноточных измерений распределение случайных ошибок измерений Δx_i подчиняется

нормальному закону распределения (функция Гаусса)

- При большом числе равноточных измерений ошибки одинаковой величины, но противоположного знака, встречаются одинаково часто
- Малые ошибки более вероятны, чем большие

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- Обозначим за α вероятность того, что истинное значение не выйдет за границы **доверительного интервала**

$$[\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x]$$

- Соответствующую этому доверительному интервалу вероятность называют **доверительной вероятностью (надежностью)** :

$$\alpha = P(\bar{x} - \Delta x \leq X \leq \bar{x} + \Delta x)$$

- С увеличением ширины доверительного интервала растет вероятность, что истинное значение попадет в этот интервал
- Задавая значение доверительной вероятности α , рассчитывают случайную погрешность Δx_α и определяют, таким образом, **доверительный интервал** :

$$\Delta x_\alpha = t_{\alpha, n} \times S_{\bar{x}}$$

- Средняя ('несмещенная') квадратическая погрешность :

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- Коэффициент Стьюдента ($t_{\alpha, n}$) определяется по таблице для заданных значений α и n

n	α		
	0,9	0,95	0,99
2	6,31	12,71	63,66
3	2,92	4,30	9,92
4	2,35	3,18	5,84
5	2,13	2,78	4,60
6	2,02	2,57	4,03
7	1,94	2,45	3,71
8	1,9	2,36	3,50
9	1,86	2,31	3,35
10	1,83	2,26	3,25

- Для окончательной записи результата прямых равноточных измерений вычисляется погрешность измерений, учитывающая как случайную, так и систематическую погрешности измерения:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\alpha}^2 + \Delta x_{sys}^2}$$

- Если одна из погрешностей превышает другую более, чем в 3 раза, меньшей погрешностью можно пренебречь

- **Пример 1:** Пусть $\Delta x_\alpha = 0.1$ и $\Delta x_{sys} = 0.5$, тогда

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_\alpha^2 + \Delta x_{sys}^2} = \sqrt{0.1^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.26} \approx 0.51$$

- Погрешность определяется фактически приборной погрешностью
 - Т.е. число измерений **может быть уменьшено**, а для получения большей точности результата следует сменить измерительный прибор на более точный

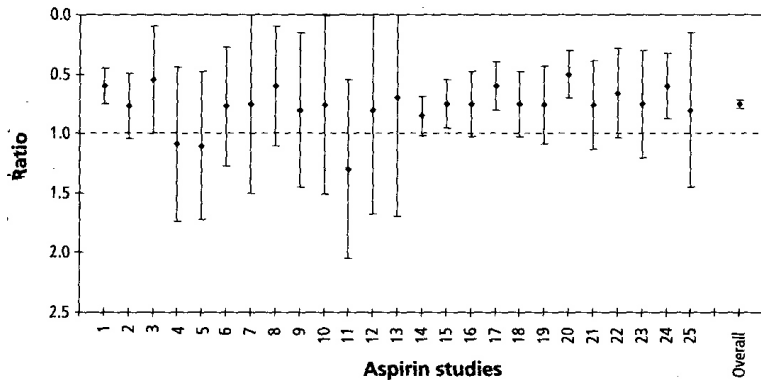
- **Пример 2:** Пусть $\Delta x_\alpha = 0.5$ и $\Delta x_{sys} = 0.1$, тогда

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_\alpha^2 + \Delta x_{sys}^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.1^2} = \sqrt{0.26} \approx 0.51$$

- Погрешность определяется фактически случайной погрешностью
 - Т.е. число равноточных измерений **необходимо увеличить** для получения большей точности результата

Обработка результатов измерений

- Среднее арифметическое и доверительный интервал



- 1 Введение
- 2 Измерения
- 3 Погрешности
- 4 Систематическая погрешность
- 5 Случайная погрешность
- 6 Обработка результатов измерений
- 7 Погрешность косвенного измерения**
- 8 Литература

Погрешность косвенного измерения

- Если искомая величина является функцией нескольких переменных

$$z = f(a, b, \dots)$$

- то за наилучшее приближение к истинному значению принимается

$$\bar{z} = f(\bar{a}, \bar{b}, \dots),$$

- где \bar{a}, \bar{b}, \dots – средние значения результатов прямых измерений
- Абсолютная погрешность определяется как

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \dots}$$

- Если функция $z = f(a, b, \dots)$ содержит переменные a, b, \dots в виде сомножителей, следует сначала прологарифмировать функцию, затем продифференцировать и в результате получим общую формулу для вычисления относительной погрешности:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \dots}$$

Погрешность косвенного измерения

- **Пример:** Пусть требуется определить объем цилиндра, измеряя его диаметр D и высоту H

$$V = f(D, H) = \frac{\pi \times D^2 \times H}{4}$$

- Логарифмируем формулу и находим частные производные:

$$\ln V = \ln \pi + 2 \ln D + \ln H - \ln 4$$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial D} = \frac{2}{D}, \quad \frac{\partial \ln V}{\partial H} = \frac{1}{H}$$

- Тогда относительная погрешность вычисления объема:

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2} \approx \sqrt{4\delta_D^2 + \delta_H^2}$$

- **Вторая методика** обработки результатов измерений применяется в случае **неравноточных измерений**
 - Возможно также ее применение вместо вышеизложенной методики
 - **Равноточные измерения** – однотипные результаты, получаемые при измерениях одним и тем же инструментом, одним и тем же методом и **в тех же условиях**
- Для каждого значения прямого измерения вычисляется собственное значение косвенного измерения

$$z_1, z_2, \dots, z_n = f(a_1, b_1, \dots), f(a_2, b_2, \dots), \dots, f(a_n, b_n, \dots)$$

- За наилучшее приближение к истинному значению принимается

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

Погрешность косвенного измерения

- Затем для заданной величины доверительной вероятности α определяется коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$ и вычисляется квадрат случайной погрешности косвенного измерения:

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}$$

- Тогда

$$\Delta z_{\alpha} = t_{\alpha,n} \times S_{\bar{z}}$$

- Итого:

$$\Delta z = \sqrt{\Delta z_{\alpha}^2 + \Delta z_{\text{sys}}^2}$$

- 1 Введение
- 2 Измерения
- 3 Погрешности
- 4 Систематическая погрешность
- 5 Случайная погрешность
- 6 Обработка результатов измерений
- 7 Погрешность косвенного измерения
- 8 Литература**

- 1 А.Д. Андреев, Л.М. Черных, 'Обработка результатов измерений в физическом практикуме' – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций, 2009
- 2 В.А. Максименко, 'Компьютерная обработка результатов измерения' – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2008
- 3 В.А. Овчинников, Ю.Г. Карпов, А.А. Повзнер, 'Математическая обработка результатов измерений в лабораториях физического практикума' – Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2008
- 4 Г.А. Весничева, В.Ф. Худяков, З.К. Яковлева, Г.Б. Яцевич, 'Обработка результатов измерений' – СПб.: Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, 2003